УДК 512.554.33

**Д. С. Ананичев**

# СЕРИЯ ПРИМЕРОВ ПОЧТИ ДИСТРИБУТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КОЛЕЦ ЛИ ПРОСТОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ*

## Введение

Л.А.Бокуть поставил задачу описания многообразий колец (алгебр) с дистрибутивной решеткой подмногообразий [1, вопрос 1.19]. Будем для краткости называть такие многообразия *дистрибутивными.* Тогда *почти дистрибутивным* естественно назвать многообразие, у которого решетка подмногообразий недистрибутивна, но все собственные подмногообразия дистрибутивны. В работе автора [2] обоснована возможность описания почти дистрибутивных многообразий в широком классе обобщенно разрешимых колец Ли, в частности, доказаны следующие факты:

1. Каждое почти дистрибутивное многообразие разрешимых колец Ли порождается конечным кольцом.

2. Каждое недистрибутивное многообразие разрешимых колец Ли содержит некоторое почти дистрибутивное многообразие.

Первый из них указывает на принципиальную обозримость множества разрешимых почти дистрибутивных многообразий, а второй показывает, что описание почти дистрибутивных многообразий привело бы и к определенному описанию разрешимых дистрибутивных многообразий: в самом деле, предъявив полный список почти дистрибутивных многообразий, мы свели бы проверку дистрибутивности того или иного конкретного многообразия к проверке того, содержит ли оно данный набор конечных колец.

Вопрос об изучении почти дистрибутивных многообразий колец поставлен Ю.Н.Мальцевым в [1, вопрос 2.81]. Первым естественным шагом на пути описания почти дистрибутивных многообразий должно быть получение их конкретных примеров. Для ассоциативных колец известно пять счетных серий таких многообразий [3]. Автором [4] были указаны две счетные серии почти дистрибутивных многообразий колец Ли, в которых каждое многообразие из этих серий имеет характеристику $p^2$ для некоторого простого $p$.

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы “Университеты России — фундаментальные исследования” (проект №617).

В данной работе строится первая серия примеров почти дистрибутивных многообразий колец Ли простой характеристики.

При работе с лиевыми многочленами мы будем использовать левонормированную запись, а через $yx^n$ обозначать одночлен $(\ldots((y\underbrace{x)x)\ldots x}_{n\text{ раз}})$. Чаще всего мы будем иметь дело с метабелевыми кольцами Ли. В таких кольцах каждый многочлен можно представить в виде $\sum\limits_{i=2}^{m} x_1x_ih_i(x_1,\ldots,x_m)=0$, где $h_i(x_1,\ldots,x_m)$ — некоторые коммутативные многочлены с целыми коэффициентами.

Буква $p$ всегда будет обозначать произвольное простое число. Через $\mathfrak{C}_p$ обозначим многообразие колец Ли, задаваемое тождествами

$$px=0, \tag{1}$$

$$xy(zt)=0, \tag{2}$$

$$xyz^p+yzx^p+zxy^p=0, \tag{3}$$

$$xyz^{2p-1}=0, \tag{4}$$

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_{2p}+\sum_{k=3}^{2p} x_1x_kx_2^px_3\cdots x_{k-1}x_{k+1}\cdots x_{2p}=0, \tag{5}$$

$$x_1x_2\cdots x_{3p}=0. \tag{6}$$

Основным результатом работы является

**Теорема.** *При любом простом $p$ многообразие $\mathfrak{C}_p$ является почти дистрибутивным.*

## 1. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

Начнем с некоторых сведений о тождествах (не обязательно лиевых) колец. Эти сведения в основном носят фольклорный характер, но для облегчения чтения дальнейших доказательств мы приводим их здесь в удобной для применения форме, преимущественно следуя [4]. Для упрощения формулировок мы не будем делать различия между тождеством $f=0$ и его левой частью $f$. В частности, определения, даваемые для многочлена $f$, будут применяться и к тождеству $f=0$.

Как и в [4], назовем многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ *$k$-однородным степени $\ell$ ($0<\ell<k$) по переменной* $x_i$, если остатки от деления на $k$ степеней вхождения переменной $x_i$ в каждый одночлен из $f(x_1,\ldots,x_n)$ равны $\ell$. Многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ назовем *$k$-однородным степени $k$ по переменной* $x_i$, если степени вхождения переменной $x_i$ в каждый одночлен из $f(x_1,\ldots,x_n)$ делятся на $k$ и не равны 0.

Пусть $\mathfrak{B}_{p^m}$ — многообразие колец, заданное тождеством $p^mx=0$.

**Лемма 1.** (См. [4, лемма 2].) *Пусть $f(x_1,\dots,x_n)=0$ — тождество в кольце $R\in\mathfrak{B}_{p^m}$. Если $w_i^\ell(x_1,\dots,x_n)$ — $(p-1)$-однородная степени $\ell$ $(0<\ell\le p-1)$ по переменной $x_i$ компонента многочлена $f(x_1,\dots,x_n)$, то $w_i^\ell(x_1,\dots,x_n)=0$ — тождество в кольце $R$.*

В дальнейшем, говоря “тождество $f=0$ зависит от $n$ переменных”, будем подразумевать, что каждая переменная входит в каждый одночлен многочлена $f$. Многочлен $f(x_1,\dots,x_n)$ назовем *$k$-однородным*, если для любого $i$ из $\{1,\dots,n\}$ найдется такое $\ell$, что $f(x_1,\dots,x_n)$ — $k$-однородный степени $\ell$ $(0<\ell\le k)$ по переменной $x_i$. Следуя [4], назовем многочлен $f(x_1,\dots,x_n)$ *$p$-приведенным*, если он $(p-1)$-однороден степени 1 по каждой переменной.

**Лемма 2.** (См. [4, лемма 5].) *Любое конечное множество тождеств эквивалентно в многообразии $\mathfrak{B}_{p^m}$ некоторому конечному множеству $p$-приведенных тождеств.*

Нам потребуется понятие однородного многообразия. Пусть $F_\infty$ — абсолютно свободное кольцо счетного ранга, $F_\infty(n)$ — подгруппа в $F_\infty$, порожденная всеми одночленами степени $n$. Подгруппы $F_\infty(n)$ образуют градуировку кольца $F_\infty$, т.е. аддитивная группа кольца $F_\infty$ является прямой суммой групп $F_\infty(n)$ по всем натуральным $n$, причем $F_\infty(n)F_\infty(m)\subseteq F_\infty(n+m)$. Ясно, что если идеал $J$ кольца $F_\infty$ разложим в прямую сумму своих подгрупп $J\cap F_\infty(n)$ по всем $n$, то фактор-кольцо $F_\infty/J$ наследует эту градуировку. Многообразие колец $\mathfrak{X}$ мы будем называть *однородным*, если соответствующий ему вербальный идеал кольца $F_\infty$ обладает указанным свойством. Если $F$ — свободное кольцо счетного ранга однородного многообразия $\mathfrak{X}$ и $F(n)$ — образ группы $F_\infty(n)$ при естественном гомоморфизме, то $F=\bigoplus_{n=1}^\infty F(n)$, причем $F(n)F(m)\subseteq F(n+m)$.

Через $deg$ и $\underline{deg}$ будем обозначать степень и нижнюю степень многочленов. Пусть $F^n=\{h\in F\mid \underline{deg}h>n\}$.

**Лемма 3.** (См. [4, следствие 2].) *Если в подмногообразии $\mathfrak{M}$ многообразия $\mathfrak{B}_{p^m}$ однородные компоненты всех $p$-приведенных тождеств являются тождествами, то многообразие $\mathfrak{M}$ однородно.*

Отметим, что многообразие нильпотентных ступени $k$ колец Ли является однородным.

В дальнейшем нам многократно потребуется проверять, выполняются ли в некотором кольце, заданном порождающими и определяющими соотношениями, те или иные тождества. Для этого будет полезна

**Лемма 4.** (См. [4, лемма 10].) *Пусть $R$ — кольцо и $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ — равенство, выполняющееся на порождающих кольца $R$, такое, что для каждого $1\leq i\leq n$ в кольце $R$ выполняются тождества*

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},xy,x_{i+1},\ldots,x_n)=0, \tag{$*$}$$

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x+y,x_{i+1},\ldots,x_n)=$$
$$=f(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n)+f(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n). \tag{$**$}$$

*Тогда $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ — тождество в кольце $R$.*

Через $\mathfrak{A}$ обозначим многообразие всех абелевых колец Ли, а через $\mathfrak{A}^2$ — многообразие всех метабелевых колец Ли. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное нильпотентное многообразие, лежащее внутри $\mathfrak{B}_{p^k}\cap\mathfrak{A}^2$ при некотором натуральном $k$. Следующие две леммы уточняют вид $p$-приведенных тождеств по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{M}$. Для удобства их формулировки выделим в $p$-приведенном тождестве $f=0$ от $m$ переменных две однородные компоненты: полилинейную $f_m$ и компоненту $f_{m+p-1}$ степени $m+p-1$.

**Лемма 5.** (См. [4, лемма 8].) *По модулю тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ либо полилинейная компонента $f_m$ многочлена $f$ приводится к виду $pg$ для некоторого полилинейного многочлена $g$, либо тождество $f=0$ эквивалентно тождеству $f_m=0$.*

**Лемма 6.** (См. [4, лемма 9].) *По модулю тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ либо компонента $f_{m+p-1}$ многочлена $f$ представима в виде*

$$pg+\sum_{i,j,k}\alpha_{ijk}x_ix_jx_k^px_1\cdots\hat{x}_i\cdots\hat{x}_j\cdots\hat{x}_k\cdots x_m,$$

*либо тождество $f=0$ эквивалентно паре тождеств $f_m=0$ и*

$$x_1x_2^px_3\cdots x_m=0.$$

**Лемма 7.** *Тождества $x_1x_2^px_3\cdots x_n=0$ и $x_1x_2x_3\cdots x_{n+p-1}=0$ эквивалентны по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{A}^2\cap\mathfrak{B}_{p^k}$.*

**Доказательство.** Очевидно, что тождество $x_1x_2^px_3\cdots x_n=0$ — следствие тождества $x_1x_2x_3\cdots x_{n+p-1}=0$.

Обратно, пусть многообразие $\mathfrak{X}$ задано внутри многообразия $\mathfrak{A}^2\cap\mathfrak{B}_{p^k}$ тождеством $x_1x_2^px_3\cdots x_n=0$. Очевидно, что $p^kx_1x_2x_3\cdots x_{n+p-1}=0$ в $\mathfrak{X}$. Выберем минимальное $m$ такое, что тождество $p^mx_1x_2x_3\cdots x_{n+p-1}=0$ выполняется в $\mathfrak{X}$. Если $m=1$, то все доказано.

Если $m > 1$, то, линеаризуя по переменной $x_2$ выполненное в $\mathfrak{X}$ тождество $p^{m-1}x_1x_2^px_3\cdots x_n = 0$, с учетом метабелевости получим

$$p^{m-1}(p-1)!\sum_{i=1}^{p} x_1y_iy_1\cdots\hat{y}_i\cdots y_px_3\cdots x_n = 0.$$

Таким образом, $p^{m-1}\sum\limits_{i=1}^{p} x_1y_iy_1\cdots\hat{y}_i\cdots y_px_3\cdots x_n = 0$ — тождество в $\mathfrak{X}$. Используя тождество Якоби ($x_1y_iy_1 = y_1y_ix_1 + x_1y_1y_i$) и метабелевость, можно представить его в виде

$$p^m x_1y_1y_2\cdots y_px_3\cdots x_n + p^{m-1}\sum_{i=2}^{p} y_1y_iy_2\cdots\hat{y}_i\cdots y_px_1x_3\cdots x_n = 0.$$

Из этого, по выбору числа $m$, следует тождество

$$p^{m-1}\sum_{i=2}^{p} y_1y_iy_2\cdots\hat{y}_i\cdots y_px_1x_3\cdots x_n = 0.$$

Вычтем из этого тождества тождество, получаемое из него же перестановкой переменных $x_1$ и $y_2$, получим тождество

$$p^{m-1}(y_1y_2y_3\cdots y_px_1x_3\cdots x_n - y_1x_1y_2\cdots y_px_3\cdots x_n) = 0,$$

которое, в силу метабелевости и тождества Якоби ($y_1y_2x_1 - y_1x_1y_2 = x_1y_2y_1$), эквивалентно тождеству

$$p^{m-1}x_1x_2x_3\cdots x_{n+p-1} = 0.$$

Таким образом, при $m > 1$ получили противоречие с минимальностью $m$.

## 2. Доказательство теоремы

Пусть $GF(p)^2$ — двумерное векторное пространство над полем из $p$ элементов, $V_p = \{(\alpha,\beta)\}$ — множество всех одномерных подпространств в $GF(p)^2$, задаваемых направляющими векторами. Их количество $p+1 > 2$ при любом $p$.

Для каждого пространства $(\alpha,\beta) \in V_p$ определим многообразие $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$, задаваемое внутри многообразия $\mathfrak{C}_p$ (из формулировки теоремы) тождеством $C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = 0$, где

$$C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \alpha(xyx^{2p-2} - xy^px^{p-1} + xy^{2p-1}) + \beta xy^px^{2p-2}.$$

Любая пара различных так определенных многообразий $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$ пересекается по многообразию $\overline{\mathfrak{C}}_p$, задаваемому внутри $\mathfrak{C}_p$ двумя тождествами: $C_p^{(1,0)}(x,y) = 0$ и $C_p^{(0,1)}(x,y) = 0$.

Роль многообразий $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$ ясна из следующего предложения.

**Предложение 1.** *Многообразия из множества* $M = \{\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)} \mid (\alpha,\beta) \in V_p\}$ *— несравнимые собственные подмногообразия в* $\mathfrak{C}_p$.

**Доказательство.** Обозначим через $K$ свободную метабелеву нильпотентную ступени $3p$ алгебру Ли с двумя порождающими $r, s$ над полем из $p$ элементов. Ясно, что как пространство над этим полем $K$ имеет базис $\{r,s\} \cup \{rsr^is^j \mid i+j < 3p\}$.

Пусть $\sigma$ — произвольное отображение множества $\{x,y,z,t\}$ в множество $\{r,s\}$. Рассмотрим идеал $I$ кольца $K$, порожденный элементами

$$x\sigma y\sigma (z\sigma)^p t\sigma - x\sigma y\sigma z\sigma (t\sigma)^p,\ x\sigma y\sigma (z\sigma)^{2p-1},\ C_p^{(\alpha,\beta)}(x\sigma, y\sigma)$$

при всевозможных $\sigma$. Через $R$ обозначим фактор-кольцо $K/I$.

Покажем, что кольцо $R$ лежит в многообразии $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$ и в $R$ не выполняется хотя бы одно тождество из пары $C_p^{(1,0)}(x,y) = 0$, $C_p^{(0,1)}(x,y) = 0$. В таком случае пересечение любой пары многообразий из множества $M$ не будет лежать в $M$, следовательно, все многообразия из $M$ будут различными и не совпадающими с $\mathfrak{C}_p$. Тем самым предложение будет доказано.

Пусть в $R$ не выполняются какие-то тождества вида

$$(x_1x_2uv^p - x_1x_2u^pv)x_3x_4\cdots x_n = 0. \tag{7}$$

Выбрав среди них тождество максимальной длины, существующее в силу нильпотентности $R$, получим многочлен $f = (x_1x_2uv^p - x_1x_2u^pv)x_3x_4\cdots x_n$, удовлетворяющий условиям леммы 4. Действительно, в силу максимальности длины $f$ свойство $(*)$ выполняется для подстановки произведения $xy$ вместо $x_1$ или $x_2$, а вследствие метабелевости — для подстановок вместо остальных переменных. Свойство $(**)$ выполняется вследствие метабелевости и тождества $px = 0$. Следовательно, $f = 0$ в $R$, что противоречит выбору тождества (7). Отсюда $xyz^pt - xyzt^p = 0$ — тождество в $R$.

Многочлен $f = xyz^p + yzx^p + zxy^p$, в силу метабелевости и тождества $px = 0$, удовлетворяет условию $(**)$ леммы 4 и, в силу метабелевости и тождества $xyz^pt - xyzt^p = 0$, удовлетворяет условию $(*)$ леммы 4. В силу антикоммутативности $f(r,r,s) = f(r,s,r) = f(s,r,r) = f(r,s,s) = f(s,r,s) = f(s,s,r) = 0$. Следовательно, $xyz^p + yzx^p + zxy^p = 0$ — тождество в $R$.

Пусть в $R$ не выполняются какие-то тождества вида

$$x_1x_2x_3^{2p-1}x_4\cdots x_n = 0. \tag{8}$$

Выбрав среди них тождество максимальной длины, существующее в силу нильпотентности $R$, получим многочлен $f = x_1x_2x_3^{2p-1}x_4\cdots x_n$, удовлетворяющий условиям леммы 4. Действительно, по выбору $f$ тождество $(xy)x_2x_3^{2p-1}x_4\cdots x_n = 0$ выполняется в $R$, по модулю тождества метабелевости $x_1x_2x_3^{2p-1}x_4\cdots(xy)\cdots x_n = 0$ и по комбинаторной лемме из [2]

$$x_1x_2(x+y)^{2p-1}x_4\cdots x_n = x_1x_2x^{2p-1}x_4\cdots x_n + x_1x_2y^{2p-1}x_4\cdots x_n + \\ + x_1x_2(x^py - xy^p)g(x,y)x_4\cdots x_n$$

для некоторого коммутативного многочлена $g(x,y)$. Учитывая, что $xyz^pt - xyzt^p = 0$ — тождество в $R$, получаем условие $(**)$ леммы 4. Следовательно, $f = 0$ в $R$, что приводит к противоречию с выбором тождества (8). Таким образом, $xyz^{2p-1} = 0$ — тождество в $R$.

Проверим, что многочлен $x_1x_2x_3^p\cdots x_{2p} + \sum_{i=2}^{2p} x_1x_ix_2^p\cdots\hat{x}_i\cdots x_{2p} = 0$ удовлетворяет условиям леммы 4. Действительно, свойство $(**)$ выполняется в силу метабелевости и тождества $px = 0$ и свойство $(*)$ выполняется по метабелевости и нильпотентности ступени $3p$ кольца $R$. Отобразим множество переменных $\{x_1,\ldots,x_{2p}\}$ во множество порождающих $\{r,s\}$. Если при таком отображении полный прообраз одного из порождающих имеет мощность больше $p$, то равенство $f = 0$ следует из выполнения в $R$ тождеств метабелевости, $xyz^pt = xyzt^p$ и $xyz^{2p-1} = 0$. Если же полные прообразы обоих порождающих имеют мощности $p$, то в левой части тождества получится в точности $p$ одинаковых одночленов и равенство $f = 0$ следует из выполнения в $R$ тождества $px = 0$. Следовательно, равенство $f = 0$ выполняется на порождающих кольца $R$.

Покажем, что тождество $xy^px^{p-1}z + yz^py^{p-1}x + zx^pz^{p-1}y = 0$ выполняется в кольце $R$. Поскольку $xy^px^{p-1}z = zy^px^p - zx^py^p$ и $zy^px^p = zy^{2p-1}x + (zyyx^p - zyy^px)y^{p-2}$, для любых $x,y,z$ из $R$ выполняются равенства

$$xy^px^{p-1}z + yz^py^{p-1}x + zx^pz^{p-1}y =$$
$$= zy^px^p - zx^py^p + xz^py^p - xy^pz^p + yx^pz^p - yz^px^p =$$
$$= \underline{zy^{2p-1}x} - zx^{2p-1}y + xz^{2p-1}y - \underline{xy^{2p-1}z} + yx^{2p-1}z - yz^{2p-1}x =$$
$$(\text{ибо } zy^{2p-1}x - xy^{2p-1}z = (zyx + yxz)y^{2p-1} = zxy^{2p-1})$$
$$= zxy^{2p-1} + xyz^{2p-1} + yzx^{2p-1} = 0.$$

Проверим, что многочлен $f = C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Действительно, во-первых, в силу соотношений $C_p^{(\alpha,\beta)}(x\sigma,y\sigma) = 0$ равенство $f = 0$ выполняется на порождающих. Во-вторых, тождество $(*)$ — следствие тождества метабелевости. В-третьих, имеет место

**Лемма 8.** (См. [2, утверждение на с.12].) *Из тождеств* $px = 0$, $xy(zt) = 0$, $xyz^p + yzx^p + zxy^p = 0$, $xy^px^{p-1}z + yz^py^{p-1}x + zx^pz^{p-1}y = 0$ *и* $xyz^{2p-1} = 0$ *следуют тождество* $C_p^{(\alpha,\beta)}(x, y+z) = C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) + C_p^{(\alpha,\beta)}(x,z)$ *и тождество* $C_p^{(\alpha,\beta)}(x+z, y) = C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) + C_p^{(\alpha,\beta)}(z,y)$.

Следовательно, свойство $(**)$ тоже выполняется. По лемме 4 тождество $C_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = 0$ выполняется в $R$. Таким образом, кольцо $R$ лежит в многообразии $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$.

Покажем, что хотя бы одно из тождеств $C_p^{(1,0)}(x,y) = 0$ и $C_p^{(0,1)}(x,y) = 0$ не выполняется на порождающих $R$. Для этого докажем, что в кольце $R$ из $C_p^{(1,0)}(r,s) = 0$ следует $\beta = 0$ и из $C_p^{(0,1)}(r,s) = 0$ следует $\alpha = 0$.

Предполагая, что $C_p^{(1,0)}(r,s) = 0$ в $R$, получаем в кольце $K$

$$C_p^{(1,0)}(r,s) = \sum_\sigma (x\sigma y\sigma (z\sigma)^p t\sigma - x\sigma y\sigma z\sigma (t\sigma)^p) f_\sigma +$$
$$+ \sum_\sigma x\sigma y\sigma (z\sigma)^{2p-1} g_\sigma + \sum_\sigma C_p^{(\alpha,\beta)}(x\sigma, y\sigma) h_\sigma,$$

где через $f_\sigma, g_\sigma, h_\sigma$ обозначены некоторые коммутативные многочлены от $r$ и $s$. Упростим первое слагаемое. Если $x\sigma = y\sigma$ или $z\sigma = t\sigma$, то

$$x\sigma y\sigma (z\sigma)^p t\sigma - x\sigma y\sigma z\sigma (t\sigma)^p = 0,$$

во всех других случаях $x\sigma y\sigma (z\sigma)^p t\sigma - x\sigma y\sigma z\sigma (t\sigma)^p = \pm(rssr^p - rss^pr)$. Таким образом,

$$\sum_\sigma (x\sigma y\sigma (z\sigma)^p t\sigma - x\sigma y\sigma z\sigma (t\sigma)^p) f_\sigma = (rssr^p - rss^pr) f$$

для некоторого многочлена $f$.

Упростив аналогичным образом второе слагаемое, получим для некоторых многочленов $g_1$ и $g_2$

$$\sum_\sigma x\sigma y\sigma (z\sigma)^{2p-1} g_\sigma = rsr^{2p-1} g_1 + rs^{2p} g_2.$$

Упростим третье слагаемое.

$$\sum_\sigma C_p^{(\alpha,\beta)}(x\sigma, y\sigma) h_\sigma = C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s) h_1 + C_p^{(\alpha,\beta)}(s,r) h_2 =$$
$$= \alpha C_p^{(1,0)}(r,s)(h_1 - h_2) + \beta rs^p r^{2p-2} h_1 - \beta rs^{2p-1} r^{p-1} h_2 =$$
$$= C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)(h_1 - h_2) + \beta(rssr^p - rss^pr) s^{p-2} r^{p-2} h_2.$$

Поскольку форма лиевого многочлена $\beta(rssr^p - rss^pr)s^{p-2}r^{p-2}h_2$ соответствует форме, к которой мы привели первое слагаемое, можно включить этот многочлен в первое слагаемое. Многочлен $h_1 - h_2$ — это сумма свободного члена $\gamma$ и многочленов вида $rh_3$ и $sh_4$. Отсюда

$$C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)(h_1 - h_2) = \gamma C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s) + C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)rh_3 + C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)sh_4.$$

При этом многочлен $C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)r$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)r &= \alpha(rsr^{2p-1} - rs^pr^p + rs^{2p-1}r) + \beta rs^pr^{2p-1} = \\ &= rsr^{2p-1}(\alpha + \beta s^{p-1}) - \alpha(rssr^p - rss^pr)s^{p-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, можно считать, что $C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)r$ — это часть первого и второго слагаемого. Аналогично $C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s)s$ — часть первого и второго слагаемого.

Таким образом, после всех упрощений получаем

$$\begin{aligned} C_p^{(1,0)}(r,s) - \gamma C_p^{(\alpha,\beta)}(r,s) &= C_p^{(1-\gamma\alpha,-\gamma\beta)}(r,s) = \\ &= (rsr^ps - rsrs^p)f + rsr^{2p-1}g_1 + rss^{2p-1}g_2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Рассмотрим такое множество одночленов от $r$ и $s$:

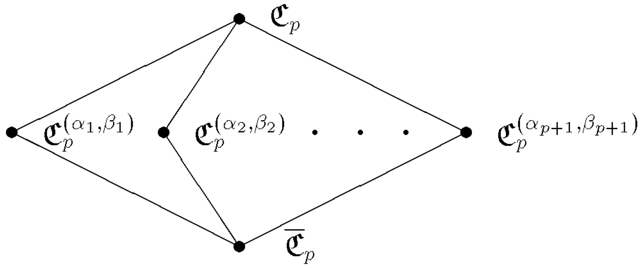
$$\Delta = \{rsr^{k(p-1)}s^{\ell(p-1)} \mid k,\ell > 0,\ k+l \le 3\}.$$

Многочлен $C_p^{(1-\gamma\alpha,-\gamma\beta)}(r,s)$ есть линейная комбинация одночленов из $\Delta$. В правой части равенства (9) линейная комбинация одночленов из $\Delta$ имеет вид $rs(rs^p - r^ps)f$. Если представить $f$ в виде линейной комбинации однородных компонент, то легко видеть, что в любой однородной компоненте правой части сумма коэффициентов при одночленах из $\Delta$ равна нулю. Если бы вектор $(1-\gamma\alpha, -\gamma\beta)$ был ненулевым, то в многочлене $C_p^{(1-\gamma\alpha,-\gamma\beta)}(r,s)$ имелась бы однородная компонента, не обладающая таким свойством, значит, $1-\gamma\alpha = 0$ и $\gamma = \alpha^{-1} \neq 0$, откуда $\beta = 0$. Таким образом, доказано, что в кольце $R$ из $C_p^{(1,0)}(r,s) = 0$ следует $\beta = 0$. Двойственным образом получаем, что в кольце $R$ из $C_p^{(0,1)}(r,s) = 0$ следует $\alpha = 0$.

Поскольку по определению множества многообразий $M$ числа $\alpha$ и $\beta$ не равны нулю одновременно, хотя бы одно из тождеств $C_p^{(0,1)}(x,y) = 0$ и $C_p^{(1,0)}(x,y) = 0$ не выполняется в кольце $R$. Предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ — некоторые многообразия. Через $L(\mathfrak{X})$ обозначим решетку всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{X}$, а через $[\mathfrak{X},\mathfrak{Y}]$ — интервал решетки всех многообразий с концами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что многообразия $\{\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)} \mid (\alpha,\beta) \in V_p\}$ составляют полный список максимальных собственных подмногообразий многообразия $\mathfrak{C}_p$ и решетки их подмногообразий дистрибутивны. Действительно, в этом случае решетка $L(\mathfrak{C}_p)$ имеет подрешетку вида




и все собственные подмногообразия в $\mathfrak{C}_p$ дистрибутивны.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое многообразие. Через $\mathfrak{X}_k$ будем обозначать многообразие всех нильпотентных индекса не более $k$ колец многообразия $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — подмногообразие однородного многообразия $\mathfrak{X}$, содержащее $\mathfrak{X}_k$. Следуя [5], будем называть $\mathfrak{M}$ $k$-расщепляемым, если в нем для любой пары многочленов $f_1$ и $f_2$ таких, что $deg f_1 \leq k$, $deg f_2 > k$, из тождества $f_1 = f_2$ следуют тождества $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. В частности, если $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие, то оно является $k$-расщепляемым. По теореме 1 из [5] решетка всех $k$-расщепляемых подмногообразий в $\mathfrak{X}$ изоморфна подпрямому произведению решеточных интервалов $[\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{k+1}]$ и $[\mathfrak{X}_{k+1}, \mathfrak{X}]$. В частности, если все подмногообразия многообразия $\mathfrak{X}$ однородны, то решетка $k$-расщепляемых многообразий составляет интервал $[\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}]$. Если же многообразие $\mathfrak{X}$ еще и нильпотентно, т.е. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_n$ для некоторого $n$, то по индукции можно считать, что решетка $L(\mathfrak{X}) = [\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}]$ получена только при помощи операции подпрямого произведения из решеток $[\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2] = L(\mathfrak{X}_2)$, $[\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4], \ldots, [\mathfrak{X}_{n-1}, \mathfrak{X}_n]$. Таким образом, для доказательства дистрибутивности решетки подмногообразий нильпотентного многообразия $\mathfrak{X}_n$ достаточно проверить дистрибутивность всех решеток вида $[\mathfrak{X}_{i-1}, \mathfrak{X}_i]$, $i \leq n$, и однородность всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{X}_n$. Проверку однородности будем производить на основании леммы 3.

**Лемма 9.** *Пусть $R$ — кольцо из $\mathfrak{C}_p$. Если $f = 0$ — $p$-приведенное тождество в $R$ от $n$ $(n \geq 3)$ переменных, то однородные компоненты многочлена $f$ — тождества в кольце $R$.*

**Доказательство.** Рассмотрим свободное кольцо Ли $K$ со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ . Обозначим через $E$ вербальный идеал кольца $K$, соответствующий многообразию $\mathfrak{C}_p$, через $F$ — вербальный идеал кольца $K$, порожденный $f + E$. Поскольку $x_1 x_2 \cdots x_{3p} \in E$ и многочлен $f$ —

$p$-приведенный, то для любого целого $k > 2$ $f_{n+k(p-1)} \in F$, следовательно, и $f_n + f_{n+p-1} + f_{n+2p-2} \in F$.

Покажем, что многочлены $f_n, f_{n+p-1}, f_{n+2p-2}$ лежат в $F$.

Если тождество $f = 0$ эквивалентно $f_n = 0$ по модулю тождества метабелевости и тождества $p^2x = 0$, то все уже доказано. Допустим противное, тогда по лемме 5 и с учетом того, что $px = 0$ в $\mathfrak{C}_p$, получаем $f_n \in F$. При $n \geq p+2 \quad n+2p-2 \geq 3p$, и лемма доказана. Рассмотрим случай $n < p+2$.

Если тождество $f = 0$ эквивалентно $x_1x_2^px_3\cdots x_n = 0$ по модулю тождеств метабелевости и тождества $p^kx = 0$, то все уже доказано. Действительно, из тождества Якоби следует $xyz^p = xz^py - yz^px$, значит, $f_{n+p-1} = 0$ и $f_{n+2p-2} = 0$ — следствия тождества $x_1x_2^px_3\cdots x_n = 0$. В противном случае, используя лемму 6 и тождество $px = 0$ , можно представить многочлен $f$ по модулю идеала $E$ в виде

$$\sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}x_ix_jx_k^px_1\cdots\hat{x}_i\cdots\hat{x}_j\cdots\hat{x}_k\cdots x_m.$$

Поскольку $yzx^p = yxz^p - zxy^p$ в многообразии $\mathfrak{C}_p$, многочлен $f$ можно по модулю идеала $E$ представить в виде

$$\beta_2x_2x_1x_3^px_4\cdots x_n + \sum_{i=3}^{n}\beta_ix_ix_1x_2^px_3\cdots\hat{x}_i\cdots x_n.$$

Допустим, что найдется такое $\ell$, что $\beta_\ell \neq 0$. Рассмотрим эндоморфизм $\sigma_l$ кольца $K$ с действием

$$\sigma_l(x_k) = \begin{cases} x_k & \text{при } k \neq l, \\ x_lx_{n+1} & \text{при } k = l. \end{cases}$$

Идеал $F$ $\sigma$-инвариантен, следовательно,

$$x_\ell x_{n+1}x_1^px_2\cdots\hat{x}_\ell\cdots x_n + \beta_\ell^{-1}f_{n+2p-2}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_\ell x_{n+1},x_{l+1},\ldots,x_n) \in F.$$

Поскольку степень $f_{n+2p-2}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_\ell x_{n+1},x_{l+1},\ldots,x_n)$ равна $n+2p-1$ и в многообразии $\mathfrak{C}_p$ выполняется тождество $xy^pzx^{p-1} = xy^pz^p - zx^py^p$ (ибо $xy^pzx^{p-1} + zx^py^p - xy^pz^p = -(xyz^p + yzx^p + zxy^p)y^{p-1} + zxy^{2p-1}$), каждый одночлен многочлена $f_{n+2p-2}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_\ell x_{n+1},x_{l+1},\ldots,x_n)$ лежит в $F$ или делится на одночлен вида $y_1y_2\cdots y_ny_{n+1}^p$. Следовательно, по нильпотентности $\mathfrak{C}_p$ $x_\ell x_{n+1}x_1^px_2\cdots\hat{x}_\ell\cdots x_n \in F$. Аналогично каждый одночлен из $f_{n+2p-2}(x_1,\ldots,x_n)$ лежит в $F$ или делится на одночлен вида $y_1y_2\cdots y_ny_{n+1}^p$, следовательно, $f_{n+2p-2}$ и $f_{n+p-1} = f - f_n - f_{n+2p-2}$ лежат в $F$.

**Лемма 10.** *Любое p-приведенное тождество от двух переменных эквивалентно по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ одному из тождеств:*

$$xy = 0; \qquad xy^p = 0;$$
$$xy^p x^{p-1} = 0; \qquad xy^{2p-1} = 0;$$
$$\lambda(xyx^{2p-2} - xy^p x^{p-1} + xy^{2p-1}) + \mu(xy^p x^{2p-2}) = 0, \quad \lambda, \mu \in \{0, \dots, p-1\}.$$

**Доказательство.** В $\mathfrak{C}_p$ выполняются тождества $xyz^{2p-1} = 0$ и $xyzt^p - xyz^p t = 0$, поэтому по модулю $\mathfrak{C}_p$ любое $p$-приведенное тождество от двух переменных эквивалентно тождеству вида

$$f = \alpha xy + \beta xyx^{p-1} + \gamma xy^p + \delta xy^p x^{p-1} + \varepsilon xy^{2p-1} + \zeta xyx^{2p-2} + \xi xy^p x^{2p-2} = 0.$$

Если в такой записи $\alpha \neq 0$, то из $f = 0$ следует $xy = 0$. Пусть $\alpha = 0$.

Если $\beta \neq 0$, то из $f = 0$ и тождества метабелевости следует тождество $x(zt)x^{p-1} + \frac{\zeta}{\beta}x(zt)x^{2p-2} = 0$, а значит, и $ztx^p = 0$ — следствие $f = 0$ в многообразии $\mathfrak{C}_p$. Поскольку $2p - 2 \geq p$, $\beta xyx^{p-1} + \gamma xy^p + \delta xy^p x^{p-1} = 0$ — следствие $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$. Подставив вместо $x$ сумму $x + y$, получаем

$$\beta xy((x+y)^{p-1} - x^{p-1}) + \delta xy^p((x+y)^{p-1} - x^{p-1}) = 0$$

— следствие $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$. По лемме 1 $\beta xy^p + \delta xy^{2p-1} = 0$ — следствие $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$, значит, при $\beta \neq 0$ $xy^p = 0$ — следствие $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$, т.е. $f = 0$ и $xy^p = 0$ эквивалентны.

Итак, можно считать, что $\beta = 0$. Аналогично можно считать, что $\gamma = 0$. В этом случае многочлен $f$ имеет вид

$$f = \delta xy^p x^{p-1} + \varepsilon xy^{2p-1} + \zeta xyx^{2p-2} + \xi xy^p x^{2p-2}. \tag{10}$$

Подставив вместо $x$ сумму $x + y$, получаем

$$\delta xy^p((x+y)^{p-1} - x^{p-1}) + \zeta xy((x+y)^{2p-2} - x^{2p-2}) + \xi xy^p((x+y)^{2p-2} - x^{2p-2}) = 0$$

— следствие из тождества $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$. По лемме 1

$$\delta xy^{2p-1} + \zeta xy^{2p-1} + \zeta C_{2p-2}^{p-1} xy^p x^{p-1} + \xi xy^p x^{2p-2} + \xi C_{2p-2}^{p-1} xy^{2p-1} x^{p-1} = 0$$

— следствие из тождества $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$. Поскольку $C_{2p-2}^{p-1} \equiv 0 \pmod p$, то $(\delta+\zeta)xy^{2p-1} + \xi xy^p x^{2p-2} = 0$, а следовательно, и $(\delta+\zeta)xy^{2p-1} = 0$ — следствие из тождества $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$. Аналогично, подставив вместо $y$ в (10) сумму $x+y$, получаем $(\delta + \varepsilon)xy^{2p-1} = 0$ — следствие из тождества $f = 0$ в $\mathfrak{C}_p$.

Если одна из сумм $\delta + \varepsilon$ или $\delta + \zeta$ не равна нулю, то из $f = 0$ следует $xy^{2p-1} = 0$ и $\delta xy^p x^{p-1} = 0$. В этом случае $f = 0$ эквивалентно по модулю $\mathfrak{C}_p$ одному из тождеств: $xy^{2p-1} = 0$ или $xy^p x^{p-1} = 0$.

Если $\delta + \varepsilon = \delta + \zeta = 0$, т.е. $\delta = -\varepsilon = -\zeta$, то тождество $f = 0$ имеет вид $\delta(xyx^{2p-2} - xy^p x^{p-1} + xy^{2p-1}) + \xi(xy^p x^{2p-2}) = 0$.

Из лемм 9, 10 и 3 непосредственно вытекает

**Лемма 11.** *По модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ каждое $p$-приведенное тождество либо эквивалентно множеству своих однородных компонент, либо эквивалентно тождеству вида*

$$\alpha(xyx^{2p-2} - xy^px^{p-1} + xy^{2p-1}) + \beta xy^px^{2p-2} = 0, \text{ где } (\alpha, \beta) \in V_p.$$

*В частности, каждое подмногообразие любого из многообразий $\mathfrak{C}_p^{(1,0)}$ и $\mathfrak{C}_p^{(0,1)}$ однородно.*

**Лемма 12.** *Любое $p$-приведенное тождество от $n$ ($n \geq 3$) переменных степени $n+p-1$ эквивалентно по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ одному из тождеств:*

$$x_1x_2^px_3\cdots x_n = 0;$$

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n = 0,$$

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n + \sum_{i=3}^{n} x_1x_ix_2^px_3\cdots x_n = 0 \text{ при } p \mid n.$$

**Доказательство.** Пусть $f = 0$ — некоторое $p$-приведенное тождество от $n$ переменных степени $n+p-1$. Допустим, что тождество $f = 0$ не эквивалентно $x_2x_1x_3^px_4\cdots x_n = 0$ по модулю тождеств метабелевости и $p^2x = 0$. В таком случае, применяя лемму 6 и то, что $px = 0$ — тождество в $\mathfrak{C}_p$, получаем, что по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ многочлен $f$ можно представить в виде

$$\sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}x_ix_jx_k^px_1\cdots\hat{x}_i\cdots\hat{x}_j\cdots\hat{x}_k\cdots x_m.$$

Пусть $S_n$ — симметрическая группа порядка $n$, $M^{(n-1,1)}$ — подстановочный $S_n$-модуль, имеющий базис $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ как линейное пространство. Пусть $S^{(n-1,1)}$ — модуль Шпехта, лежащий в $M^{(n-1,1)}$ с системой образующих $\{u_i - u_j| \ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. Определим гомоморфизм $\rho$ модуля $S^{(n-1,1)}$ на $S_n$-модуль, состоящий из всех нетривиальных в $\mathfrak{C}_p$ тождеств вида $\sum \alpha_kx_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}^px_{i_4}\cdots x_{i_n} = 0$ следующим образом: $\rho(u_i - u_j) = x_ix_jx_k^px_{l_1}\cdots x_{l_{n-3}}$ ($k$ — любой элемент из $\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,\hat{j},\ldots,n\}$). Сюръективность этого гомоморфизма следует из метабелевости многообразия $\mathfrak{C}_p$ и тождеств $xyzt^p = xyz^pt$ и $xyz^p + yzx^p + zxy^p = 0$ в нем. Корректность следует из лиевых тождеств $xx = 0, xy + yx = 0, xyz + yzx = xzy$.

Известно (см., например, [6]), что при $n \not\equiv 0 \pmod p$ модуль $S^{(n-1,1)}$ неприводим, следовательно, в этом случае любое нетривиальное в $\mathfrak{C}_p$ тождество вида

$$\sum \alpha_kx_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}^px_{i_4}\cdots x_{i_n} = 0$$

эквивалентно тождеству $x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n = 0$. При $n \equiv 0 \pmod p$ модуль $S^{(n-1,1)}$ имеет единственный собственный ненулевой подмодуль с базисом $\{u_1+\cdots+u_n = (u_1-u_n)+\cdots+(u_{n-1}-u_n)\}$. Следовательно, в этом случае любое нетривиальное в $\mathfrak{C}_p$ тождество вида $\sum\alpha_k x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}^p x_{i_4}\cdots x_{i_n} = 0$ эквивалентно либо тождеству $x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n = 0$, либо тождеству

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n + \sum_{i=3}^{n} x_1x_ix_2^px_3\cdots x_n = 0.$$

**Лемма 13.** *Любое $p$-приведенное тождество от $n$ ($n \geq 3$) переменных степени $n+2p-2$ эквивалентно по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ тождеству*

$$x_1x_2^{2p-1}x_3\cdots x_n = 0.$$

**Доказательство.** Пусть $f = 0$ — некоторое $p$-приведенное тождество от $n$ переменных степени $n+2p-2$. По модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ тождество $f = 0$ эквивалентно тождеству $g = 0$, где многочлен $g$ имеет вид

$$g = \beta_1x_2x_1^{2p-1}x_3\cdots x_n + \sum_{i=2}^{n}\beta_ix_1x_i^{2p-1}x_2\cdots\hat{x}_i\cdots x_n,$$

поскольку в $\mathfrak{C}_p$ выполняются тождества

$$xy^px^{p-1}z = xy^pz^p - zx^py^p$$

(ибо $xy^px^{p-1}z + zx^py^p - xy^pz^p = zxy^{2p-1} - (xyz^p + yzx^p + zxy^p)y^{p-1}$) и

$$xy^pz^p = xy^{2p-1}z$$

(следствие тождества $xyzt^p = xyz^pt$).

Пусть найдется такое $k$, что $p$ не делит $\beta_k$. Используя тождество $xy^pz^p = xy^{2p-1}z$, многочлен $g$ можно представить в виде

$$g = \beta_1x_2x_1^{2p-1}x_3\cdots x_n + \beta_kx_1x_k^px_2^px_3\cdots\hat{x}_k\cdots x_n + \sum_{i\neq k}\beta_ix_1x_i^{2p-1}x_2\cdots\hat{x}_i\cdots x_n.$$

Обозначим через $\tau$ эндоморфизм свободного кольца Ли со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, действующий следующим образом:

$$\tau(x_j) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{при } j = k = 1, \\ x_1 + x_j & \text{при } j = k \neq 1, \\ x_j & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Рассмотрим тождество $\tau(g) - g = 0$ — следствие $f = 0$. По лемме 1 его $p$-приведенная компонента также является следствием $f = 0$. Без ограничения общности при $k = 2$ она имеет вид

$$\beta_k x_1 x_2 x_1^{p-1} x_3^p x_4 \cdots x_n.$$

Используя вновь тождество $xy^p z^p = xy^{2p-1}z$, получаем, что тождество $f = 0$ эквивалентно тождеству $x_1 x_2^{2p-1} x_3 \cdots x_n = 0$.

Следующая лемма описывает полилинейные тождества по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{B}_p$. Она непосредственно следует из леммы 13 работы [4].

**Лемма 14.** *Полилинейное тождество от $n$ переменных эквивалентно по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{B}_p$ одному из тождеств:*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 0;$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_1 x_i x_2 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n = 0 \text{ при } p \mid n.$$

Леммы 9, 10, 12, 13 и 14 дают полное описание нетривиальных $p$-приведенных тождеств по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$. Из полученного описания тождеств следует

**Лемма 15.** *Каждое собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{C}_p$ либо содержится в многообразии $\mathfrak{C}_p^{(0,1)}$, либо совпадает с некоторым многообразием $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное собственное подмногообразие $\mathfrak{C}$ многообразия $\mathfrak{C}_p$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ — тождество, выполненное в $\mathfrak{C}$, но не в $\mathfrak{C}_p$. По лемме 2 можно считать, что многочлен $f$ $p$-приведенный. Если $n > 2$, то по лемме 9 можно считать, что многочлен $f$ однородный. В таком случае по леммам 12, 13, 14 тождество $f = 0$ эквивалентно одному из следующих тождеств:

$$x_1 x_2^p x_3 \cdots x_n = 0; \tag{11}$$

$$x_1 x_2 x_3^p x_4 \cdots x_n = 0; \tag{12}$$

$$x_1 x_2 x_3^p x_4 \cdots x_n + \textstyle\sum_{i=3}^{n} x_1 x_i x_2^p x_3 \cdots x_n = 0 \ \text{ при } p = n; \tag{13}$$

$$x_1 x_2^{2p-1} x_3 \cdots x_n = 0; \tag{14}$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 0; \tag{15}$$

$$\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_1 x_i x_2 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n = 0 \ \text{ при } p \mid n. \tag{16}$$

Из (13) следует тождество $x_1x_2x_3^px_4\cdots x_{p+1}=0$, а из (16) следует тождество $x_1x_2x_3\cdots x_{2p+1}=0$. Таким образом, из каждого из тождеств (11)–(16) следует тождество $x_1x_2^px_1^{2p-2}=0$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{E}$ содержится в многообразии $\mathfrak{C}_p^{(0,1)}$.

Если $n=2$, то по лемме 10 можно считать, что либо из тождества $f=0$ следует тождество $x_1x_2^px_1^{2p-2}=0$, либо $f=0$ эквивалентно тождеству $\alpha(xyx^{2p-2}-xy^px^{p-1}+xy^{2p-1})+\beta(xy^px^{2p-2})=0$ для некоторых $\alpha,\beta\in GF(p)$. Следовательно, либо многообразие $\mathfrak{E}$ содержится в многообразии $\mathfrak{C}_p^{(0,1)}$, либо совпадает с некоторым многообразием $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$.

В частности, многообразиями $\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)}$ исчерпываются максимальные собственные подмногообразия многообразия $\mathfrak{C}_p$. Следовательно, решетка $L(\mathfrak{C}_p)$ не дистрибутивна.

**Предложение 2.** *Решетка $L(\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)})$ дистрибутивна для всех $(\alpha,\beta)\in V_p$.*

**Доказательство.** Лемма 15 показывает, что для доказательства дистрибутивности всех решеток $L(\mathfrak{C}_p^{(\alpha,\beta)})$ достаточно установить дистрибутивность решетки $L(\mathfrak{C}_p^{(0,1)})$. Для краткости обозначим многообразие $\mathfrak{C}_p^{(0,1)}$ через $\mathfrak{X}$. Заметим, что $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_{3p}$. Так как многообразие $\mathfrak{X}$ нильпотентно, а по лемме 11 все его подмногообразия однородны, остается проверить дистрибутивность интервалов $[\mathfrak{X}_k,\mathfrak{X}_{k+1}]$.

Пусть многообразие принадлежит интервалу $[\mathfrak{X}_k,\mathfrak{X}_{k+1}]$, тогда оно может быть задано внутри $\mathfrak{X}$ тождеством $x_1x_2\cdots x_{k+1}$ и некоторым множеством $p$-приведенных однородных тождеств степени $k$. Устройство таких тождеств описано в леммах 10, 12, 13 и 14. По модулю тождеств многообразия $\mathfrak{X}$ однородное тождество степени $k$ эквивалентно одному из тождеств (в каждом тождестве число переменных $n$ такое, что степень равна $k$):

$$x_1x_2^px_3\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } p<k<3p); \tag{17}$$

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } p+1<k<3p); \tag{18}$$

$$x_1x_2x_3^px_4\cdots x_n+\sum_{i=3}^{n}x_1x_ix_2^px_3\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } k=p); \tag{19}$$

$$x_1x_2^{2p-1}x_3\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } 2p\le k<3p); \tag{20}$$

$$x_1x_2\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } 1<k<3p); \tag{21}$$

$$\sum_{i=2}^{n}x_1x_ix_2\cdots\hat{x}_i\cdots x_n=0 \qquad (\text{при } k=p \text{ или } k=2p); \tag{22}$$

$$x_1x_2^px_1^{p-1}=0 \qquad (\text{при } k=2p); \tag{23}$$

$$x_1x_2x_1^{2p-2}-x_1x_2^px_1^{p-1}+x_1x_2^{2p-1}=0 \qquad (\text{при } k=2p). \tag{24}$$

По лемме 7 тождества (17) и (21) эквивалентны.

Покажем, что по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{C}_p$ из каждого из тождеств (22) и (23) следует тождество (18). Заменив в (22) переменные с четными индексами на $z$, $x_1$ на $x$, а $x_{2i+1}$ на $y_i$, получим тождество $pxz^p y_1 \cdots y_{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} xy_i y_1 \cdots \hat{y}_i \cdots y_{p-1} z^p = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{p-1} xy_i y_1 \cdots \hat{y}_i \cdots y_{p-1} z^p = 0. \tag{25}$$

Поскольку $xyzt^p = xyz^p t$ выполняется в многообразии $\mathfrak{C}_p$, тождество (25) эквивалентно

$$xy_1 zy_2^p y_3 \cdots y_{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} xy_i zy_1^p y_2 \cdots \hat{y}_i \cdots y_{p-1} = 0,$$

которое в силу тождества Якоби дает

$$(p-1)xzy_1^p y_2 \cdots y_{p-1} + zy_1 xy_2^p y_3 \cdots y_{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} zy_i xy_1^p y_2 \cdots \hat{y}_i \cdots y_{p-1} = 0.$$

Следовательно,

$$zxy_1^p y_2 \cdots y_{p-1} + zy_1 xy_2^p y_3 \cdots y_{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} zy_i xy_1^p y_2 \cdots \hat{y}_i \cdots y_{p-1} = 0.$$

Поменяв местами $x$ и $z$ и вычтя тождество (25), получим, что тождество (18) — следствие тождества (25). Таким образом, из (22) следует (18).

Проведя полную линеаризацию (23) по переменной $x_2$, получим

$$(p-1)! \sum_{i=1}^{p} x_1 y_i y_1 \cdots \hat{y}_i \cdots y_p x_1^{p-1} = 0,$$

что по тождеству Якоби эквивалентно

$$px_1 y_1 y_2 \cdots y_p x_1^{p-1} + \sum_{i=2}^{p} y_1 y_i y_2 \cdots \hat{y}_i \cdots y_p x_1^p = 0.$$

Таким образом, из тождества (23) следует (25), а значит, и (18).

Пусть $k < 2p$, тогда между тождествами (17)–(22), очевидно, имеются следования (17) $\Rightarrow$ (21) $\Rightarrow$ (22) $\Rightarrow$ (18) $\Rightarrow$ (20). Отсюда интервал $[\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{k+1}]$ имеет ширину не более 2, а стало быть, это — дистрибутивная решетка.

Пусть $k \geq 2p$, тогда между тождествами (17),(18),(20)–(24), очевидно, имеются следования (17) $\Rightarrow$ (21) $\Rightarrow$ (22) $\Rightarrow$ (18) $\Rightarrow$ (20), (23) $\Rightarrow$ (18) и

(23) $\Rightarrow$ (24) [поскольку из (23) и (20) при $k = 2p$, очевидно, следует (24)]. Поэтому по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{X}_{k+1}$ любое многообразие из интервала $[\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{k+1}]$ либо задается одним из тождеств: (17),(18),(20)–(24), либо является пересечением пары многообразий, заданных тождествами из цепи (17) $\Rightarrow$ (21) $\Rightarrow$ (22) $\Rightarrow$ (18) $\Rightarrow$ (20) и цепи (23) $\Rightarrow$ (24). Таким образом, решетка $[\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{k+1}]$ является подпрямым произведением двух цепей, и, стало быть, она дистрибутивна.

Теорема непосредственно следует из предложений 1 и 2 и леммы 15.

**Литература**

1. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 4-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1993.

2. Ананичев Д.С. Почти дистрибутивные многообразия колец Ли // Матем. сб. 1995. Т.186, №4. С.3–20.

3. Волков М.В. О почти дистрибутивных многообразиях ассоциативных колец // V Сибир. школа по многообразиям алгебраич. систем: Тез. сообщ. Барнаул, 1988. С.86–88.

4. Ананичев Д.С. Серии примеров почти дистрибутивных многообразий колец Ли // Фундамент. и приклад. математика. 1999. Т.5, №4 С.955–978.

5. Волков М.В. Структуры многообразий нильпотентных колец // Исслед. по соврем. алгебре. Свердловск: УрГУ, 1981. С.19–34.

6. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.:Мир, 1982.

*Статья поступила 10.02.1999 г.;*
*окончательный вариант 22.09.1999 г.*